

---

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### Φυλλάδιο 8

---

#### 1 Συστήματα συντεταγμένων

**Άσκηση 1.1** Δίνεται η καμπύλη  $(\gamma)$  με εξίσωση

$$x^2 - 2y^2 + 2x - 12y - 18 = 0$$

στο σύστημα συντεταγμένων  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης  $(\gamma)$  στο σύστημα συντεταγμένων  $(Q, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  όπου  $Q(-1, -3)$ ,  $\vec{x}_0 = (1, 0)$  και  $\vec{y}_0 = (0, 1)$ .

**Άσκηση 1.2** Δίνεται η καμπύλη  $(\gamma)$  με εξίσωση

$$x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x - 2y = 0$$

στο σύστημα συντεταγμένων  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης  $(\gamma)$  στο σύστημα συντεταγμένων  $(O, \vec{v}, \vec{w})$  όπου  $\vec{v} = (1/2, -\sqrt{3}/2)$  και  $\vec{w} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ .

**Άσκηση 1.3** Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση

$$3x^2 + 6y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$$

σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ . Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της καμπύλης σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων  $O'x'y'$  που προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του  $Oxy$  έτσι ώστε η εξίσωση να στερείται πρωτοβάθμιων όρων.

**Άσκηση 1.4** Δίνεται η αλγεβρική παράσταση  $A = x^2 - y^2$  στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$ . Να βρεθεί η γωνία στροφής  $\varphi$  κατά την οποία θα πρέπει να στραφούν οι άξονες του  $Oxy$  έτσι ώστε στο νέο σύστημα συντεταγμένων  $Ox'y'$  η παράσταση  $A$  να είναι ίση με  $-2x'y'$ .

**Άσκηση 1.5** Να βρεθεί η μορφή της επιφάνειας με εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 13 = 0$$

σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε η εξίσωσή της να στερείται πρωτοβάθμιων όρων.

**Άσκηση 1.6** Δείξτε ότι η εξίσωση

$$2x^2 + xy - y^2 + 7x + 4y + 5 = 0$$

στο επίπεδο  $Oxy$ , παριστάνει ζεύγος ευθειών.

**Άσκηση 1.7** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon) : (2x - y = 0, 3y = z)$  σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων  $Ox'y'z'$  που προκύπτει από το αρχικό  $Oxyz$  με στροφή του επιπέδου  $Oxy$  γύρω από τον άξονα  $Oz$  κατά γωνία  $\varphi = \pi/6$ .

**Άσκηση 1.8** Να δείξετε ότι τα σημεία του χώρου  $\mathbb{R}^3$  που ικανοποιούν το ζεύγος των εξισώσεων  $(x^2 + y^2 = 4, y = z)$  είναι τα σημεία μιας έλλειψης.

*Υπόδειξη:* Να αλλάξετε το σύστημα συντεταγμένων στρέφοντας το επίπεδο  $Oyz$  περί τον άξονα  $Ox$  κατά γωνία  $\pi/4$ .

**Άσκηση 1.9** Δίνεται σε πολικές συντεταγμένες  $(\rho, \theta)$  η εξίσωση

$$\rho \cos(\theta - \pi/4) = 4.$$

Να μετατραπεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες και να βρεθεί το είδος της.

**Άσκηση 1.10** Δείξτε ότι σε πολικές συντεταγμένες  $(\rho, \theta)$  ο κύκλος, που έχει κέντρο το σημείο  $(\rho_0, \theta_0)$  και ακτίνα  $R$ , έχει εξίσωση που δίνεται από την

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho \cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$

**Άσκηση 1.11** Δίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(\rho, \theta, z)$  η εξίσωση

$$5\rho \cos \theta + 6\rho \sin \theta = z.$$

Να μετατραπεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες και να βρεθεί το είδος της.

**Άσκηση 1.12** Δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(\rho, \phi, \theta)$  η εξίσωση

$$\rho^2 \sin(2\phi) \sin^2 \theta = 4.$$

Να μετατραπεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες.